Tema 6

Ecuaciones de primer y segundo grado

6.1.- Identidad y ecuación

Una **igualdad algebraica** está formada por dos expresiones algebraicas separadas por un igual. Una igualdad puede ser:

- Una **identidad** cuando es cierta para cualquier valor de la incógnita.
- Una **ecuación** si no es cierta para todos los valores de la incógnita.

6.2.- Elementos de una ecuación

$$\overbrace{15x^3 + 2x^2 - 5}^{1er.\ Miembro} = \overbrace{3x^2 + 2}^{2^{o}\ Miembro}$$

Términos

- **Miembro**: en una ecuación se llama miembro a cada una de las expresiones algebraicas que están separadas por el igual. ***Primer miembro*** es el que se encuentra a la izquierda del igual y ***segundo miembro*** el que está a la derecha.
- **Término**: es cada uno de los monomios que forma los miembros. A aquel que no tiene letras se le denomina ***término independiente***
- **Incógnitas:** son las letras o valores desconocidos que se encuentran en cada término.
- **Grado:** es el mayor exponente de cualquiera de sus términos una vez concluidas las operaciones que podamos realizar en la misma.

6.3.- Transposición de términos

Si a los dos miembros de una ecuación se les suma, resta, multiplica o divide por un mismo número (en los casos de producto y división debe ser distinto de cero) o por una misma expresión algebraica, se obtiene una ecuación equivalente.

Este proceso se puede abreviar. Cualquier término se puede cambiar de miembro si cambiamos su operación por la inversa, es decir lo que está sumando pasa restando, lo que está restando pasa sumando, si está multiplicando pasa dividiendo y si está dividiendo pasa multiplicando.

A este proceso se le llama **transposición de términos**.

6.4.- Resolución de ecuaciones de primer grado.

Para resolver ecuaciones de primer grado se siguen los siguientes pasos:

1. *Eliminamos los denominadores multiplicando los dos miembros de la ecuación por el m.c.m de los denominadores*
2. *Eliminamos los paréntesis*
3. *Agrupamos los términos con la incógnita en un miembro y los términos independientes en el otro mediante la transposición de términos.*
4. *Reducimos los términos semejantes de cada miembro.*
5. *Despejamos la incógnita y hallamos la solución.*

Ej. → *Resolver la ecuación siguiente:*

$$\boxed{\frac{3x}{4}-\frac{2x}{3}-5=\frac{2x}{3}-\frac{3x}{2}-2} \longrightarrow \frac{9x}{\cancel{12}}-\frac{8x}{\cancel{12}}-\frac{60}{\cancel{12}}=\frac{8x}{\cancel{12}}-\frac{18x}{\cancel{12}}-\frac{24}{\cancel{12}}$$

$$9x-8x-60=8x-18x-24 \longrightarrow 9x-8x-8x+18x=-24+60$$

$$11x=-36 \longrightarrow \boxed{x=\frac{-36}{11}}$$

6.5.- Ecuaciones de segundo grado

Una ecuación de segundo grado con una incógnita es una igualdad algebraica con las siguientes características:

- Tiene una sola incógnita.
- Alguno de sus términos es de grado 2 y no contiene ninguno de grado superior a 2.

De forma general se puede expresar mediante el esquema $ax^2+bx+c=0$, donde ***a,b*** y ***c*** son números conocidos y $a \neq 0$.

Si ***b*** y ***c*** son distintos de ***0*** la ecuación se llama **completa**, en caso de que alguno de ellos sea ***0*** es **incompleta**.

Resolución de ecuaciones de segundo grado.

Una ecuación de segundo grado puede tener 2, 1 o ninguna solución. Llamaremos x_1 y x_2 a las soluciones de la ecuación.

Existe una fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado que se puede aplicar en cualquiera de ella, aunque hay casos de ecuaciones en los que podemos aplicar formulas particulares que nos darán la solución más rápidamente.

En función de los valores de b y c tendremos los siguientes casos:

CASO 1 → **Si b=0 :** Ecuaciones del tipo ***ax² + c = 0***

- Si $-\frac{c}{a}>0$ hay dos soluciones: $\boxed{x_1=+\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad , \quad x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}}$
- Si $-\frac{c}{a}<0$ no hay solución

Ej. → Resolver la ecuación ***5x² – 20 = 0***

$$5x^2-20=0 \;\rightarrow\; 5x^2=20 \;\rightarrow\; x^2=\frac{20}{5} \;\rightarrow\; x^2=4 \;\rightarrow\; x=\sqrt{4} \;\rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x_1=+2} \\ \boldsymbol{x_2=-2} \end{array}\right\}$$

CASO 2 → **Si c=0** : Ecuaciones del tipo ***ax² + bx = 0***

- Las soluciones son $\boxed{x_1=0 \quad , \quad x_2=-\frac{b}{a}}$

Ej. → Resolver la ecuación ***5x² – 10x = 0***

$$5x^2-10x=0 \;\rightarrow\; 5x(x-2)=0 \;\rightarrow\; \left\{\begin{array}{lll} 5x=0 & \rightarrow & \boldsymbol{x_1=0} \\ x-2=0 & \rightarrow & \boldsymbol{x_2=2} \end{array}\right\}$$

CASO 3 → **Caso general:** Ecuaciones del tipo ***ax² + bx + c = 0***

- Las soluciones se obtienen mediante la siguiente fórmula $\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$ y pueden ser dos soluciones, una o ninguna.

Ej. → Resolver la siguiente ecuación ***x² + 2x – 3 = 0***

$$\left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=2 \\ c=-3 \end{array}\right\} \rightarrow\; x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot(1)\cdot(-3)}}{2\cdot(1)} \;\rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x_1=\frac{-2+\sqrt{16}}{2}=\frac{-2+4}{2}=\frac{2}{2} \;\rightarrow \boldsymbol{x_1=1} \\ x_2=\frac{-2-\sqrt{16}}{2}=\frac{-2-4}{2}=\frac{-6}{2} \;\rightarrow \boldsymbol{x_1=-3} \end{array}\right\}$$