TEMA 5

Expresiones Algebraicas

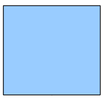
5.1.- Lenguaje Algebraico

El ***lenguaje numérico*** sirve para expresar operaciones utilizando solamente números.

El ***lenguaje algebraico*** sirve para expresar situaciones reales utilizando para ello números, letras y operaciones entre ellos. A cada letra que se utiliza se le denomina incógnita.

Lenguaje Oral	***Leng. Algebraico***
La edad de Julia	j
Su hermana Toñi tiene cuatro años más que ella	j+4
Su padre tiene el doble de la suma de las edades de las dos	2(j+j+4)=2(2j+4)
Su madre es 7 años más pequeña que el padre	2(2j+4)-7
Un número más el triple del mismo	n+3n
La mitad de un número menos 3 unidades	$\frac{n}{2}-3$
La edad de una persona hace 5 años	a-5

Ejemplos geométricos



a

Calcular el área (A) y el perímetro (P) del cuadrado de la figura

A = a²   P = 4a

Calcular el área (A) y el perímetro (P) del rectángulo sabiendo que el largo es el doble del ancho

A = a·2a = 2a²   P = 2a + 2·(2a) = 6a

a) Valor de una expresión algebraica: es el ***valor numérico*** que resulta de realizar las operaciones indicadas en la expresión algebraica una vez que se conocen el valor de la/las incógnitas.

Ej. → ***3x – 3*** *si* ***x = +5*** *el valor numérico de la expresión será* ***3· (+5) – 3 = 12***

Lenguaje Oral	Expr.Algebr.	Valor
Un número desconocido	x	5
El doble de dicho número menos el triple del mismo	2x-3x	-5
Un número par múltiplo de x	2x	10
El siguiente número par	2x+2	12
Un número impar relacionado con x	2x+1	11
La suma del número par con el impar	2x+(2x+1)	21
La tercera parte del número *par* más la mitad del *impar*	$\frac{2x}{3}+\frac{2x+1}{2}$	$\frac{10}{3}+\frac{11}{2}$
El cuadrado de la suma del número x con su doble	$(x+2x)^2$	$(5+10)^2$
El doble del cuadrado del número sumado con su triple	$2x^2+3x$	$2\cdot5^2+3\cdot5$
El doble de la suma del cuadrado de un núm. con el triple	$2\cdot(x^2+3x)$	$2(5^2+3\cdot5)$

5.2.- Monomios

Un monomio es una expresión algebraica formada por el *producto* de un número por una o varias letras. Al número se le denomina *coeficiente* y las letras con sus exponentes se conoce con el nombre de *parte literal*

Se denomina *grado* a la suma de los exponentes de la parte literal.

Ej. → Identifica entre las siguientes expresiones algebraicas cuales de ellas son monomios

$3x$ $\quad 2x^2$ $\quad 5$ $\quad \frac{x^2}{2}$ $\quad x$ $\quad \frac{1}{3}x^2$ $\quad \cancel{x+3}$ $\quad -3x$ $\quad \frac{-x^3}{4}$

$\cancel{\frac{5}{x}}$ $\quad 5a^2b$ $\quad \cancel{\frac{3a}{b}}$ $\quad \frac{5a^2x}{3}$ $\quad \cancel{2a^2+b}$ $\quad \cancel{3+ab}$ $\quad rt$

a) Monomios semejantes: son aquellos que tienen *idéntica* parte literal, es decir tienen las mismas letras elevadas a los mismos exponentes respectivamente.

Ej. → $5a^2b$ *es semejante a* $8ba^2$, $3x^4y$ *es semejante a* $-5x^4y$

b) Monomios opuestos: son aquellos que teniendo la misma parte literal (son semejantes), sus coeficientes son números opuestos.

Ej. → $3a^4b^3$ *es opuesto a* $-3a^4b^3$

5.2.1.- Suma y resta de monomios

La suma (o resta) de monomios se realiza *siempre* entre monomios semejantes. Para hacerla se suman (o restan) los coeficientes y se deja la misma parte literal (*se suman o restan los números y se dejan las letras como están*)

Ej. → *Suma/resta los monomios que se puedan:*

a) $3a^3b^4 + 5b^4a^2 - 8a^3b^4 + 2a^2b^4 = -5a^3b^4 + 7a^2b^4$

b) $3xy - 5yx + 2x^2y - 3xy + 4y^2x - 5x^2y + 2y^2x = -5xy - 3x^2y + 6\,xy^2$

c) $3tx - 7yt^2 + 5tx - 6xt + 4yt^2 - 7t^2y = 2tx - 10t^2y$

d) $x^3 + 5x^2 - 3x^3 + 7x^2 - 3x^3 - 2x^2 = -5x^3 + 10x^2$

5.2.2.- Producto y división de monomios

a) Producto de monomios: para multiplicar dos o más monomios, por un lado se realiza el producto de sus coeficientes y por el otro, el producto de la parte literal.

Ej. → $4x^2b \cdot 5x^3bt = 20x^5b^2t$

b) División de monomios: para dividir dos monomios, por un lado se dividen sus coeficientes y por el otro, sus partes literales (*si se puede*)

Ej. → $\dfrac{10x^2y^4t}{2xy^2} = 5xy^2t$

5.3.- Polinomios

Un polinomio es una expresión algebraica formada por la suma/resta de dos o más monomios. Cada uno de los monomios que lo forma se llama ***término*** y en caso de no llevar parte literal se denomina ***término independiente***. Se suelen nombrar mediante un letra mayúscula con la incógnita entre paréntesis.

Llamamos ***grado*** del polinomio al mayor de los grados de todos sus términos.

Ej. → $P(x) = 3x^4 + 2x^3 - 5x + 4$ → *es un polinomio de cuarto grado llamado P(x)*

Término independiente

5.3.1.- Suma y resta de polinomios

Para sumar o restar polinomios, sumamos o restamos sus términos semejantes. *(Recordamos que la resta es la suma de un monomio con el opuesto del otro).*

Suma $(5x^3 - 4x^2 + 2x + 3) + (2x^3 + 3x^2 - 5)$

Ejs. → *Suma*

$$\begin{array}{rrrr} 5x^3 & -\,4x^2 & +\,2x & +\,3 \\ 2x^3 & +\,3x^2 & & -\,5 \\ \hline \mathbf{7x^3} & \mathbf{-\,x^2} & \mathbf{+\,2x} & \mathbf{-\,2} \end{array}$$

Resta $(6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x + 3) - (2x^4 - 5x^2 + 6x - 3)$

Resta

$$\begin{array}{rrrrr} 6x^4 & -\,3x^3 & +\,2x^2 & -\,5x & +\,3 \\ -2x^4 & & +\,5x^2 & -\,6x & +\,3 \\ \hline \mathbf{4x^4} & \mathbf{-\,3x^3} & \mathbf{+\,7x^2} & \mathbf{-\,11x} & \mathbf{+\,6} \end{array}$$

5.3.2.- Producto de un número por un polinomio

Para multiplicar un número por un polinomio, se realiza el producto de dicho número por cada uno de los términos del polinomio.

Ej. → $3 \cdot (4x^5 + 2x^4 - 3x^2 - 3) = \mathbf{12x^5 + 6x^4 - 9x^2 - 9}$

5.3.3.- Producto de polinomios

a) Producto de un monomio por un polinomio: Para multiplicar un monomio por un polinomio, se realiza el producto de dicho monomio por cada uno de los términos del polinomio.

Ej. → $2a \cdot (3a^2 + 2a - 5) = \mathbf{6a^3 + 4a^2 - 10a}$

b) Producto de dos polinomios: El producto de dos polinomios se hace multiplicando cada uno de los monomios del primero por todos y cada uno de los monomios del segundo, y sumando después los monomios semejantes obtenidos de las multiplicaciones.

Ej. → *Multiplica* $P(x) = 4x^3 - 5x + 1$ *por* $Q(x) = 2x^2 - 7$

$$\begin{array}{rrrrrr} & & 4x^3 & & -\,5x & +\,1 \\ & & & & 2x^2 & -\,7 \\ \hline & & -\,28x^3 & & +\,35x & -\,7 \\ & 8x^5 & -\,10x^3 & +\,2x^2 & & \\ \hline P(x)\cdot Q(x) \rightarrow & \mathbf{8x^5} & \mathbf{-\,38x^3} & \mathbf{+\,2x^2} & \mathbf{+\,35x} & \mathbf{-\,7} \end{array}$$

5.3.4.- División de un polinomio entre un monomio

Para dividir un polinomio entre un monomio, dividimos cada uno de los términos del polinomio entre el monomio.

Ej. → *Dividir* $P(x) = 9x^5 - 15x^2 + 18x$ *entre* $Q(x) = 3x$

$$\begin{array}{rrr|lll}
\mathbf{9x^3} & \mathbf{-15x^2} & \mathbf{+18x} & \mathbf{3x} & & \\ \cline{4-6}
-9x^3 & & & \mathbf{3x^2} & \mathbf{-5x} & \mathbf{+6} \\ \cline{1-1}
0 & -15x^2 & & & & \\
 & +15x^2 & & & & \\ \cline{2-2}
 & 0 & +18x & & & \\
 & & -18x & & & \\ \cline{3-3}
 & & 0 & & &
\end{array}$$

$$\mathbf{P(x) : Q(x) = (9x^5 - 15x^2 + 18x) : (3x) = 3x^2 - 5x + 6}$$

5.3.5.- Factor común

Sacar factor común consiste en encontrar los números y letras repetidos en un conjunto de sumandos. Es el proceso inverso a la propiedad distributiva.

$$\xrightarrow{\textit{Sacar factor común}}$$

Ej. → $6x^3y - 4x^2y^4 = 2x^2y \cdot (3x - 2y^3)$

$$\xleftarrow{\textit{Propiedad distributiva}}$$

5.4.- Igualdades Notables

5.4.1.- Cuadrado de una suma

El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primer sumando, más el cuadrado del segundo, más el doble del producto del primero por el segundo.

Ej. → $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

5.4.2.- Cuadrado de una diferencia

El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primero, más el cuadrado del segundo, menos el doble del producto del primero por el segundo.

Ej. → $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

5.4.3.- Suma por diferencia

El producto de una suma de dos monomios por la diferencia de los mismos, es igual a la diferencia de los cuadrados.

Ej. → $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$